2016 年北大经院

宏观经济学考博模拟题

本资料仅供育明教育集训营及专业课一对一学员

育明考试研究院 研发

1，假设生产函数为

$$Y(t)=e^{g_A t}F[e^{g_K t}K(t),e^{g_L t}L(t)],$$

这里的 F 是规模报酬不变的，同时我们还有 $\dot{L}/L=n$，$\dot{K}=sY$，请证明仅当 $g_A=g_K=0$ 时，平衡增长路径（即产出的增长率是稳定的）才会存在，并解释该结论的经济含义。（提示：请注意规模报酬不变的性质）

参考答案：利用规模报酬不变的特性，我们可以得到

$$Y(t)=e^{(g_A+g_K)t}F[1,e^{(g_L-g_K)t}\frac{L(t)}{K(t)}],$$

再利用 $\dot{L}/L=n$ 和 $\dot{K}=sY$，我们可以得到

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=s\frac{Y}{K}=se^{(g_A+g_K)t}F[1,e^{(g_L-g_K+n)t}\frac{L(0)}{K(t)}].$$

要想平衡增长路径存在，即 $\dot{K}/K$ 为常数，我们必须有

$$e^{(g_A+g_K)t}$$

和

$$F[1,e^{(g_L-g_K+n)t}\frac{L(0)}{K(t)}]$$

为常数，而要这两个式子为常数，我们就必须有

$$g_A+g_K=0 \text{ 和 } e^{(g_L-g_K+n)t}/K(t)$$

为常数，前者必然要求 $g_A=g_K=0$，后者则要求

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}=g_L-g_K+n=g_L+n.$$

g_L 代表劳动增进（或者节约劳动）的技术进步，g_K 代表资本增进（或者节约资本）的技术，g_A 是全要素技术进步，可以同比例地提高资本和劳动的生产效率。在平衡增长路径，我们必须有 $g_A=g_K=0$，说明经济达到稳态时，技术进步主要体现为劳动增进型的，而不是

资本增进型的，所以平衡增长路径上的资本增长速度主要取决于劳动增进型的技术进步速度 g_L 以及人口增长速度。

2，考虑一个新古典生产函数

$$Y_j = F(K_j, AL_j),$$

其中，j 代表经济中第 j 个同质企业，A 代表劳动增进型的技术水平，它为 $A = (\sum_j K_j)^{\phi}$，这里 $\phi < 1$。消费者效用函数是 CRRA 形式的，跨期替代弹性为 θ，假设市场是完全竞争的，劳动力供给数量 L 固定不变，资本折旧率为0，求出该经济的 Euler 方程，并讨论该经济是否存在平衡增长路径，如果存在，为什么？如果不存在，也为什么？（提示：请参考干中学模型）

参考答案：利用新古典生产函数一次齐次的性质，我们可以将生产函数写为

$$y_j = Y_j/L_j = F(k_j, K^{\phi}),$$

其中 $K = \sum_j K_j$，$k_j = K_j/L_j$。

由于企业都是同质的，所以 k_j 对于任何企业都是相同的，这样我们必然有 $k_j = k = K/L$，于是我们可以利用生产函数的额一次齐次性质，将生产函数继续改写为

$$y = kF(1, k^{\phi-1}L^{\phi}) = kf(k^{\phi-1}L^{\phi}).$$

根据该式，我们可以求得利率为

$$\begin{aligned} r = \frac{dy}{dk} &= f(k^{\phi-1}L^{\phi}) + kf'(k^{\phi-1}L^{\phi})[(\phi-1)k^{\phi-2}L^{\phi} - \phi k^{\phi-1}L^{\phi-1}\frac{K}{k^2}] \\ &= f(k^{\phi-1}L^{\phi}) - k^{\phi-1}L^{\phi}f'(k^{\phi-1}L^{\phi}) \end{aligned}$$

由于生产函数是新古典性质的，因此我们有 $f' > 0$ 和 $f'' < 0$ 以及 Inada 条件。而在 $\phi < 1$ 情况下，k 越大，就有 $k^{\phi-1}L^{\phi}$ 越小，从而根据 $f' > 0$ 和 $f'' < 0$ 以及 Inada 条件，我们有

$$\lim_{k\to\infty} r = 0 \text{ 以及 } \lim_{k\to 0} r = \infty.$$

我们容易写出Euler方程为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho),$$

从而利用利率在极限上的性质，我们容易得到仅存在一个稳态的 k^*，使得 $r = \rho$，人均消费增长刚好为 0，所以该问题只存在稳态路径，不存在人均消费稳定增长的平衡增长路径。

回顾干中学模型，我们将的经典干中学模型相对于这个模型，主要区别是 $\phi = 1$，这里引入 $\phi < 1$ 的假设，结果就完全改变了。在 $\phi = 1$ 时，此时利率变为

$$r = f(L) - Lf'(L)$$

它显然是个常数，因而存在平衡增长路径，使得人均消费保持固定增长。而当 $\phi < 1$ 时，结果就只有稳态路径了。主要原因是，当 $\phi = 1$ 时，化简以后的生产函数变成了边际报酬不变

的，而当 $\phi < 1$ 时，化简后的生产函数依然是边际报酬递减的。

3，考虑一个固定替代弹性（CES）的生产函数

$$Y = F(K,L) = A[a(bK)^{\varepsilon} + (1-a)((1-b)L)^{\varepsilon}]^{1/\varepsilon}.$$

(1)证明该生产函数中，资本与劳动的替代弹性为 $1/(1-\varepsilon)$。

参考答案：替代弹性是两种物品的替代率对于相对价格变动的反应灵敏程度，而劳动力价格相对于资本的价格为

$$MPKL = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{(1-a)(1-b)^{\varepsilon}}{ab^{\varepsilon}}(\frac{L}{K})^{\varepsilon-1},$$

所以替代弹性为

$$-\frac{\partial(L/K)/(L/K)}{\partial MPKL/MPKL} = -\frac{MPKL/(L/K)}{\partial MPKL/\partial(L/K)} = -\frac{1}{\varepsilon-1}.$$

(2)人口增长率为n，资本折旧率为 δ，效用函数为 CRRA 形式并且跨期替代弹性为 θ，求出消费者问题的 Euler 方程。

参考答案：我们先把生产函数改写成人均形式的

$$y = F(K,L)/L = A[a(bk)^{\varepsilon} + (1-a)(1-b)^{\varepsilon}]^{1/\varepsilon},$$

然后得到市场均衡的利率为

$$r = dy/dk - \delta = Aab^{\varepsilon}[ab^{\varepsilon} + (1-a)(1-b)^{\varepsilon}k^{-\varepsilon}]^{(1-\varepsilon)/\varepsilon} - \delta.$$

我们不难得到人均消费的增长方程为

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho).$$

(3)证明当 $0 < \varepsilon < 1$，即替代弹性大于 1 的时候，该经济有可能存在平衡增长路径，即人均收入维持固定增长速度。

参考答案：当替代弹性大于 1 的时候，我们有 $0 < \varepsilon < 1$，从而有

$$\lim_{k\to\infty} r = Aba^{1/\varepsilon} - \delta \text{ 以及 } \lim_{k\to 0} r = \infty,$$

从而只要有

$$Aba^{1/\varepsilon} > \delta + \rho,$$

人均消费的增长率就永远是整数，平衡增长路径上的人均消费增长率会收敛到

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(Aba^{1/\varepsilon} - \delta - \rho).$$

如果

$$Aba^{1/\varepsilon} < \delta + \rho,$$

那么该经济会收敛到稳态路径，即人均消费增长率会收敛到 0，即停止增长。

(4)而当 $\varepsilon < 0$，即替代弹性小于 1 的时候，该经济不可能存在平衡增长路径，但有可能出现稳态路径，即人均收入增长速度逐步收敛到 0。参考答案：如果替代弹性小于 1，从而有 $\varepsilon < 0$，那么会有

$$\lim_{k\to\infty} r = -\delta \text{ 以及 } \lim_{k\to 0} r = Aba^{1/\varepsilon} - \delta$$

容易看出，仅当

$$Aba^{1/\varepsilon} > \delta + \rho,$$

才有可能存在稳态路径，使得人均消费的增长率收敛到 0。

如果

$$Aba^{1/\varepsilon} < \delta + \rho,$$

该经济从起点开始，就不可能出现正的增长率，是没有意义的。

4，我们研究 Lucas（1988）模型，该模型的产品部门生产函数和资源分配方案为

$$Y = C + \dot{K} + \delta K = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha},$$

人力资本生产函数为

$$\dot{H} = B(1-u)H - \delta H.$$

消费者效用函数是 CRRA 形式的，跨期替代弹性为 θ。

(1)证明在平衡增长路径上，C、K、H 和 Y 都会保持相同的增长速度。

(2)证明平衡增长路径的存在性和唯一性。

(3)定义$k = K/H$、$\chi = C/K$，写出新的具有稳态路径的动力系统。

(4)用特征根判断法证明平衡增长路径的鞍点稳定性。

(5)用相位图方法判断平衡增长路径的稳定性，分 $\alpha < \theta$ 和 $\alpha > \theta$ 两种情况讨论。（提示：可参考 Barro 和 Sala-i-Martin 所著 Economic Growth 一书）

参考答案：

我们先写出该问题的 Hamilton 函数

$$H_c = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \mu[AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K] + \lambda[B(1-u)H - \delta H].$$

一阶条件为

$$C^{-\theta} - \mu = 0, \tag{1}$$

$$\mu(1-\alpha)A(\frac{K}{uH})^{\alpha}H - \lambda BH = 0, \tag{2}$$

$$\dot{\mu} = \mu(\rho+\delta) - \mu\alpha A(\frac{K}{uH})^{\alpha-1}, \tag{3}$$

$$\dot{\lambda} = \lambda(\rho+\delta) - \mu(1-\alpha)Au(\frac{K}{uH})^{\alpha} - \lambda B(1-u), \tag{4}$$

我们先定义人力资本相对于物质资本的影子价格，然后根据式（2）得到

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(1-\alpha)A}{B}(\frac{K}{uH})^{\alpha}.$$

再根据式（3）和（4），容易得到价格 p 的动态增长方程为

$$\frac{\dot{p}}{p} = \alpha A(\frac{K}{uH})^{\alpha-1} - B, \tag{5}$$

注意，推导该式需要利用式（2）简化式（4）。

再利用式（1）和（3），我们容易得到消费的增长方程

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}[\alpha A(\frac{K}{uH})^{\alpha-1} - \rho - \delta]. \tag{6}$$

物质资本和人力资本增长方程为

$$\frac{\dot{K}}{K} = A(\frac{K}{uH})^{\alpha-1} - C/K - \delta \tag{7}$$

$$\frac{\dot{H}}{H} = B(1-u) - \delta \tag{8}$$

参照我们对Rebelo(1991)模型的分析，我们很容易证明平衡增长路径的存在性和唯一性，而且也容易证明在平衡增长路径上面消费、物质资本和人力资本的增长率相同，该增长率等于

$$\frac{1}{\theta}[B-\rho-\delta],$$

这些过程留给同学们自己动手。

由于平衡增长路径上面消费和物质资本的增长率等同于人力资本的增长率，因此我们可以定义 $\chi = \frac{C}{K}$ 和 $k = \frac{K}{H}$，并得到具有稳态路径的动力系统

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\alpha-\theta}{\theta}A(\frac{k}{u})^{\alpha-1} + \chi - \frac{\rho+\delta}{\theta} + \delta \tag{9}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = A(\frac{k}{u})^{\alpha-1} - \chi - B(1-u) \tag{10}$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{B}{\alpha} - B(1-u) - \chi \tag{11}$$

在平衡增长路径上，我们还必定有 $\frac{k}{u}$ 为常数，因此我们可以定义 $z = \frac{k}{u}$，这样上述系统

还可以转化为

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi}=\frac{\alpha-\theta}{\theta}Az^{\alpha-1}+\chi-\frac{\rho+\delta}{\theta}+\delta \tag{12}$$

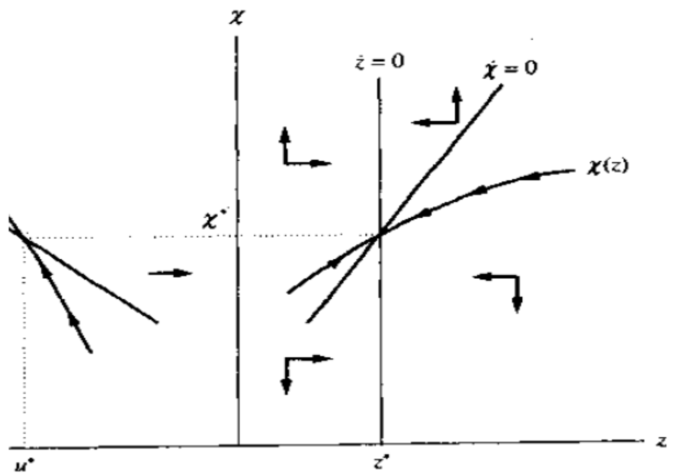
$$\frac{\dot{u}}{u}=\frac{B}{\alpha}-B(1-u)-\chi \tag{13}$$

$$\frac{\dot{z}}{z}=Az^{\alpha-1}-\frac{B}{\alpha} \tag{14}$$

这个系统的 Jacobia 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{(\alpha-1)(\alpha-\theta)}{\theta}Az^{\alpha-2}|_{*} \\ -1 & B & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)Az^{\alpha-2}|_{*} \end{pmatrix} \tag{15}$$

我们不难证明，这个矩阵存在一负两正三个特征根，从而是鞍点稳定的。



我们还可以采用相位图分析法证明存在一个鞍点稳定路径，下面是当 $\alpha<\theta$ 时的相位图，具体中间过程请同学们自己推导；$\alpha>\theta$ 的情形也可以采用相同的方法得到。

5，我们考虑一个简化的 Judd（1985）模型。模型中有两类人，一类是资本家，他们依靠资本收入生活，其消费为 c，预算约束式为

$$\dot{k}=\bar{r}k-c.$$

这里 $\bar{r}$ 表示税后的实际资本回报率。资本家的效用函数为 $v(c)$，如果它的跨期替代弹性为常数 θ。

第二类人是工人，他们不拥有任何财富和资本，只能出卖自己的劳动为生，其全部收入都用于消费，因此其消费量可以直接写为 $\bar{w}l+T$，这里的 T 是政府转移支付，$\bar{w}$ 的表示税后的实际工资率。工人的效用函数为 $u(\bar{w}l+T,l)$。

政府预算约束式为

$$T=(r-\bar{r})k+(w-\bar{w})l.$$

(1)如果生产函数满足新古典函数性质，市场是完全竞争的，证明工人的消费量为 $f(k,l)-\bar{r}k$，并将工人的劳动供给量写成$(k,\bar{r})$ 的隐函数形式。

(2)求出资本家的消费积累方程。

(3)假如政府赋予工人效用函数的权重为 γ，资本家的权重为 $1-\gamma$，写出政府最优化问题的 Hamilton 方程，并求出一阶条件。

(4)证明在稳态路径上一定有资本边际税率等于 0，即有 $r=\bar{r}$。

参考答案

Judd（1985）给出了一个类似于 Chamley（1986）的模型，不过 Judd（1985）模型主要着眼于收入再分配问题，考虑是否应该对资本收入（富人）征税补贴给劳动者（穷人）。最后的结果比较出乎意料，即使政府只考虑穷人的福利，完全不管富人死活，那么从长期看，政府也不应该对资本征税。Judd（1985）模型考虑的出发点虽然不同于 Chamley（1986）模型，但模型的框架结构以及结论基本等同于后者，所以这两个模型都被视为最优税收结构理论以及 Ramsey 问题模型的开创性文献。

我们考虑一个简化的 Judd（1985）模型。模型中有两类人，一类是资本家，他们拥有资本，“不劳而获”，依靠资本收入生活，其消费为 c，预算约束式为

$$\dot{k}=\bar{r}k-c. \tag{16}$$

这里 $\bar{r}$ 的定义跟前文完全相同，表示税后的实际资本回报率。该式表明资本家把一部分收入用于消费，另一部分用于积累。资本家的效用函数为 $v(c)$ ，如果它的跨期替代弹性为常数 θ，那么资本家的消费增长方程一定满足如下 Euler 方程

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}(\bar{r}-\rho) \tag{17}$$

这里的 ρ 是贴现因子。

第二类人是工人，他们是真正的“无产者”，不拥有任何财富和资本，只能出卖自己的劳动为生。由于他们不需要积累资本，所以其全部收入都用于消费，因此其消费量可以直接写为 $\bar{w}l+T$，这里的 T 是政府转移支付，$\bar{w}$ 的定义跟前文相同，表示税后的实际工资率。工人的效用函数为 $u(\bar{w}l+T,l)$，这里的 u 满足 $u_c'>0,u_{cc}''<0,u_l'<0,u_{ll}''<0$ 等常规性质。

政府征收资本税和工资税为工人提供转移支付，为简化问题，我们假设政府不能发行债券，这样政府在每一期都必须实现预算平衡，即有

$$T=(r-\bar{r})k+(w-\bar{w})l.$$

假设生产函数满足新古典函数性质，并且市场是完全竞争的，那么一定有 $f(k,l)=rk+wl$。

这样，政府预算平衡式，我们可以把工人的消费量改写为 $f(k,l)-\bar{r}k$。这说明，在这个政府不能发债和工人不能积累（变成资本家）的简化框架下，政府只要决定了资本税率，就相当于同时决定了转移支付和工资税，因此我们只需要考虑资本税率这么一个政策变量。

工人不需要积累资本，也不购买债券，因此不存在跨期优化问题，他们只需要考虑静态的劳动力供给问题。其最优的劳动力供给量由下式给出

$$u_c'(\cdot)w+u_l'=0. \tag{18}$$

该式决定的最优劳动供给量为 $l=l(k,\bar{r})$。

政府的目标函数是让工人和资本家的总效用之和最大化，假设工人效用在政府心目中的权重为 $\gamma\,(0\leq\gamma\leq 1)$，这样政府的目标函数为

$$\int_0^{\infty}\{\gamma u[f(k,l)-\bar{r}k,\ l]+(1-\gamma)v(c)\}e^{\rho t}dt.$$

政府政策变量是 $\bar{r}$，工人和资本家的消费、资本积累和劳动力供给都是这个政府政策变量的函数。因此，政府通过控制政策变量 $\bar(r)$，就可以实现对市场均衡的控制，从而挑选最佳的市场均衡以实现政府目标函数的最大化。这也就是 Chamley （1986）模型中所构造的 Ramsey 问题框架。

政府最优化问题的 Hamilton 函数为

$$\gamma u[f(k,l(k,\bar{r}))-\bar{r}k,\ l]+(1-\gamma)v(c)+q_1(\bar{r}k-c)+\frac{q_2c}{\theta}(\bar{r}-\rho)+\eta\bar{r}.$$

其中，Hamilton 乘子 q_1 对应资本积累方程，q_2 对应资本家的消费增长方程，η 对应不等式约束条件 $\bar{r}\geq 0$。Hamilton 函数的一阶条件分别为

$$\gamma[u_c'(wl_{\bar{r}}'-k)+u_l'l_{\bar{r}}']+q_1k+\frac{q_2c}{\theta}+\eta=0, \tag{19}$$

$$\dot{q}_1=q_1\rho-\gamma u_c'(r-\bar{r})-\gamma(u_c'wl_k'+u_l'l_k')-q_1\bar{r}, \tag{20}$$

$$\dot{q}_2=q_2\rho-(1-\gamma)v'(c)+q_1-\frac{q_2(\bar{r}-\rho)}{\theta}, \tag{21}$$

$$\eta\bar{r}=0,\ \text{如果}\ \eta>0，\text{则有}\,\bar{r}=0. \tag{22}$$

当经济达到稳态路径时，我们有 $\dot{k}=\dot{c}=0$，此时有稳态的资本存量和消费水平，与此对应它们的影子价格 q_1 和 q_2 在稳态路径上也必然为常数，即有 $\dot{q}_1=\dot{q}_2=0$。利用式（18），我们将式（20）改为为

$$\dot{q}_1=q_1(\rho-\bar{r})-\gamma u_c'(r-\bar{r}).$$

这样，在稳态路径上，我们一定有 $r=\bar{r}$，即最优的资本边际税率等于 0。

育明考研课程特惠

课程体系	包含内容	价格
优惠资料包	考研历年真题 重点笔记 两次名师一对一指导 赠送复试指导	仅398
考研专业课全程视频指导	考研专业课全程视频 赠送考试资料	仅1280
暑期特惠小班	分为基础强化和冲刺两个阶段，为期一周。赠送专业课全套资料，复试免费辅导面试	仅3160
专业课一对一	VIP个性化辅导36课时。复试阶段可协助联系导师。	8800元起
状元集训营	从2015年1月直到12月31日。小班课程200课时，VIP个性化辅导36课时。复试阶段可协助联系导师。	36800元起